

CL 多小波图象编码

黄卓君 马争鸣

(中山大学电子系信息处理实验室, 广州市 510275)

摘要 CL 多小波具有与其他多小波(如 GHM 多小波)不同的特点, 一幅图象经过多小波变换后, 原图象的绝大部分能量都集中于最低分辨率子图象, 而对于 CL 多小波而言, 其最低分辨率子图象的绝大部分能量又进一步集中于它的第一个分量, 这意味着 CL 多小波图象编码需要考虑的重要系数比其他多小波图象编码减少了四分之三, 本文将 CL 多小波这一特点应用于图象编码, 实验结果表明, 就压缩比和信噪比而言, 这种充分利用 CL 多小波特点的图象编码方法, 其编码结果要优于目前公开发表的 GHM 多小波图象编码的结果。

关键词 CL 多小波 GHM 多小波 图象编码

中图分类号: TN919.81 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2001)07-0662-07

CL Multiwavelet Image Coding

HUANG Zhuo-jun, MA Zheng-ming

(Lab. of Information Processing, Dept. of Electronics, Zhongshan Univ., Guangzhou 510275)

Abstract CL multiwavelets have some characteristics different from that of other multiwavelets such as the commonly-used GHM multiwavelets. After the multiwavelet transformation of an image, most energy of the image is mainly concentrated on its lowest resolution subimage. As for CL multiwavelets, most energy of the lowest resolution subimage is further concentrated on its first component. This implies that the number of most significant coefficients to be encoded in CL multiwavelet image coding is approximately one-fourth as many as that in other multiwavelet image coding. However this characteristic of CL multiwavelets as well as its potential possibility of application to image coding have not been mentioned yet. In this paper, we first reveal this characteristic of CL multiwavelets from theoretical aspect and experimental data and then apply this characteristic in CL multiwavelets image coding. We have achieved the results better than that of GHM multiwavelet image coding published so far in terms of compression ratio as well as PSNR.

Keywords CL multiwavelets, GHM multiwavelets, Image coding

0 引言

多小波是一种新的小波, 它包含多个小波, 但又不是多个小波的简单堆积, 多小波所包含的多个小波之间, 必须满足一定的数学关系, 在现有的各种多小波中, GHM 多小波^[1]是最早被发现的多小波, 也是应用最为广泛的多小波, 对一些多小波分析后认为, CL 多小波^[2]是最为适合图象压缩编码的多小波, 本文在介绍 CL 多小波及其特点的基础上, 提出

了一种充分利用 CL 多小波特点的多小波图象编码方法。

1 多小波图象变换

1.1 向量信号的多小波变换

一个向量信号 $F(n) = \begin{bmatrix} f_1(n) \\ \vdots \\ f_k(n) \end{bmatrix}$ 的多小波变换

和反变换公式如下:^[3,4]

$$\text{正变换: } \begin{cases} F_{\text{Low}}(m) = \sum_n L(n-2m)F(n) \\ F_{\text{High}}(m) = \sum_n H(n-2m)F(n) \end{cases}$$

$$\text{反变换: } F(n) = \sum_m L^T(n-2m)F_{\text{Low}}(m) + \sum_m H^T(n-2m)F_{\text{High}}(m)$$

其中, $L(n)$ 和 $H(n)$ 都是 $K \times K$ 的矩阵, 它们分别表示多小波的低通和高通滤波器的冲激响应, 这里, K 是多小波所包含的小波个数. 在诸多多小波中, GHM 多小波和 CL 多小波都是 $K=2$ 的多小波, 它们所确定的 $L(n)$ 和 $H(n)$ 可查阅本文的附录.

向量信号的多小波变换和反变换也可以用图 1 表示.

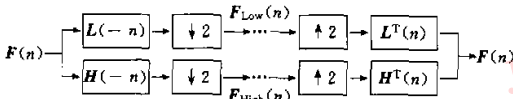


图 1 向量信号的多小波变换和反变换

1.2 图象的多小波变换

多小波变换只适用于向量信号, 因此, 要对图象进行多小波变换, 必须先对图象的行和列进行前置滤波, 然后将经过前置滤波的图象的行和列, 按照一定规则组成向量信号, 再进行多小波变换.

设 $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,N} \end{bmatrix}$ 是一幅 $N \times N$

的图象, 其中, a_{ij} 表示象素值, $1 \leq i, j \leq N$, 那么对图象 A 进行多小波变换的步骤如下:

(1) 行前置滤波

首先将 A 的每一行按下面的方式组成行向量信号

$$A_{\text{row}}(n) = \begin{bmatrix} a_{i,2n-1} \\ a_{i,2n} \end{bmatrix}, n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}, i = 1, 2, \dots, N$$

然后对 $A_{\text{row}}(n)$ 进行前置滤波

$$B_{\text{row}}(n) = \sum_k P_{re}(k)A_{\text{row}}(n-k) = \begin{bmatrix} b_{i,n} \\ b_{i,\frac{N}{2}+n} \end{bmatrix},$$

$$n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}, i = 1, 2, \dots, N$$

其中, $P_{re}(n)$ 是 2×2 的矩阵, 表示前置滤波器的冲激响应. 前置滤波器依赖于所使用的多小波, 不同的多小波, 需要不同的前置滤波器. GHM 多小波和 CL 多小波所需要的前置滤波器可查阅本文的附

录, 于是, 经过行前置滤波, 有

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,N} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,N} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N,1} & b_{N,2} & \dots & b_{N,N} \end{bmatrix}$$

(2) 列前置滤波

将 B 的每一列, 按下面的方式组成列向量信号

$$B_{\text{col}}(n) = \begin{bmatrix} b_{2n-1,i} \\ b_{2n,i} \end{bmatrix}, n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}, i = 1, 2, \dots, N$$

对 B_{col} 进行前置滤波

$$C_{\text{col}}(n) = \sum_k P_{re}(k)B_{\text{col}}(n-k) = \begin{bmatrix} c_{n,1} \\ c_{\frac{N}{2}+n,1} \end{bmatrix},$$

$$n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}, i = 1, 2, \dots, N$$

于是, 经过列前置滤波, 有

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,N} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N,1} & b_{N,2} & \dots & b_{N,N} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,N} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N,1} & c_{N,2} & \dots & c_{N,N} \end{bmatrix}$$

(3) 行方向的多小波变换

将 C 的每一行, 按下面的方式组成向量信号

$$C_{\text{row}}(n) = \begin{bmatrix} c_{i,n} \\ c_{i,\frac{N}{2}+n} \end{bmatrix}, n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}, i = 1, 2, \dots, N$$

对 $C_{\text{row}}(n)$ 进行多小波变换

$$C_{\text{row}}^L(m) = \sum_n L(n-2m)C_{\text{row}}(n) = \begin{bmatrix} c_{i,m}^L \\ c_{i,\frac{N}{4}+m}^L \end{bmatrix}$$

$$m = 1, 2, \dots, \frac{N}{4}, i = 1, 2, \dots, N$$

$$C_{\text{row}}^H(m) = \sum_n H(n-2m)C_{\text{row}}(n) = \begin{bmatrix} c_{i,m}^H \\ c_{i,\frac{N}{4}+m}^H \end{bmatrix}$$

$$m = 1, 2, \dots, \frac{N}{4}, i = 1, 2, \dots, N$$

于是, 经过行方向的多小波变换, 有

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,N} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N,1} & c_{N,2} & \cdots & c_{N,N} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{C} = \begin{bmatrix} c_{1,1}^L & \cdots & c_{1,\frac{N}{2}}^L & c_{1,1}^H & \cdots & c_{1,\frac{N}{2}}^H \\ c_{2,1}^L & \cdots & c_{2,\frac{N}{2}}^L & c_{2,1}^H & \cdots & c_{2,\frac{N}{2}}^H \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{N,1}^L & \cdots & c_{N,\frac{N}{2}}^L & c_{N,1}^H & \cdots & c_{N,\frac{N}{2}}^H \end{bmatrix}$$

(4) 列方向的多小波变换

将 \bar{C} 的每一列按下面的方式组成向量信号

$$C_{icol}^L(n) = \begin{bmatrix} c_{n,i}^L \\ c_{\frac{N}{2}+n,i}^L \end{bmatrix}, C_{icol}^H(n) = \begin{bmatrix} c_{n,i}^H \\ c_{\frac{N}{2}+n,i}^H \end{bmatrix}$$

$$n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}, i = 1, 2, \dots, N$$

分别对 $C_{icol}^L(n)$ 和 $C_{icol}^H(n)$ 进行多小波变换

$$C_{icol}^{LL}(m) = \sum_n L(n-2m) C_{icol}^L(n) = \begin{bmatrix} c_{m,i}^{LL} \\ c_{\frac{N}{4}-m,i}^{LL} \end{bmatrix}$$

$$C_{icol}^{LH}(m) = \sum_n H(n-2m) C_{icol}^L(n) = \begin{bmatrix} c_{m,i}^{LH} \\ c_{\frac{N}{4}+m,i}^{LH} \end{bmatrix}$$

$$C_{icol}^{HL}(m) = \sum_n L(n-2m) C_{icol}^H(n) = \begin{bmatrix} c_{m,i}^{HL} \\ c_{\frac{N}{4}-m,i}^{HL} \end{bmatrix}$$

$$C_{icol}^{HH}(m) = \sum_n H(n-2m) C_{icol}^H(n) = \begin{bmatrix} c_{m,i}^{HH} \\ c_{\frac{N}{4}+m,i}^{HH} \end{bmatrix}$$

$$n = 1, 2, \dots, \frac{N}{4}, i = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

于是, 经过列方向的多小波变换, 最后得到图象

A 的多小波变换

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_{1,1}^{LL} & \cdots & c_{1,\frac{N}{2}}^{LL} & c_{1,1}^{HL} & \cdots & c_{1,\frac{N}{2}}^{HL} \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ c_{\frac{N}{2},1}^{LL} & \cdots & c_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}}^{LL} & c_{\frac{N}{2},1}^{HL} & \cdots & c_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}}^{HL} \\ c_{1,1}^{LH} & \cdots & c_{1,\frac{N}{2}}^{LH} & c_{1,1}^{HH} & \cdots & c_{1,\frac{N}{2}}^{HH} \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ c_{\frac{N}{2},1}^{LH} & \cdots & c_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}}^{LH} & c_{\frac{N}{2},1}^{HH} & \cdots & c_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}}^{HH} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LL & HL \\ LH & HH \end{bmatrix}$$

这里

$$LL = \begin{bmatrix} c_{1,1}^{LL} & \cdots & c_{1,\frac{N}{2}}^{LL} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ c_{\frac{N}{2},1}^{LL} & \cdots & c_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}}^{LL} \end{bmatrix}, HL = \begin{bmatrix} c_{1,1}^{HL} & \cdots & c_{1,\frac{N}{2}}^{HL} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ c_{\frac{N}{2},1}^{HL} & \cdots & c_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}}^{HL} \end{bmatrix}$$

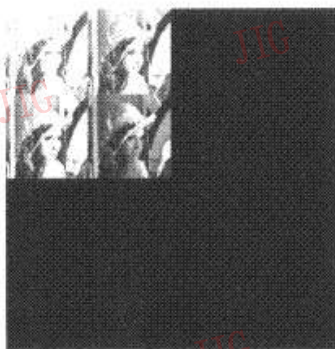
$$LH = \begin{bmatrix} c_{1,1}^{LH} & \cdots & c_{1,\frac{N}{2}}^{LH} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ c_{\frac{N}{2},1}^{LH} & \cdots & c_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}}^{LH} \end{bmatrix}, HH = \begin{bmatrix} c_{1,1}^{HH} & \cdots & c_{1,\frac{N}{2}}^{HH} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ c_{\frac{N}{2},1}^{HH} & \cdots & c_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}}^{HH} \end{bmatrix}$$

虽然在图象编码的应用中, 往往要对图象进行多次多小波变换, 但这时只需对每次变换后的 LL 子图象再次进行多小波变换即可。

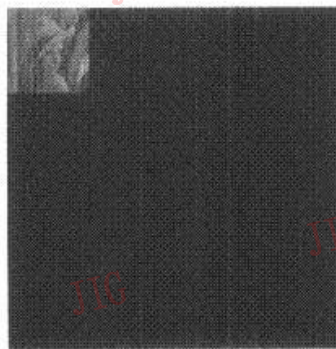
图 2 给出了分别用 GHM 多小波和 CL 多小波对 512×512 大小的 Lena 图象进行多小波变换的结果。



(a) Lena 原图



(b) 经过 GHM 多小波变换的 Lena 图象



(c) 经过 CL 多小波变换的 Lena 图象

图 2 分别经过 GHM 和 CL 多小波变换的 Lena 图象

2 CL 多小波图象编码

从上述图象多小波变换的步骤不难看出,一幅 $N \times N$ 大小的图象经过多小波变换后,分解为 4 幅 $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ 大小不同分辨率和不同空间方向的子图象 (LL 、 LH 、 HL 和 HH),且每幅子图象又可以进一步分解为 4 个 $\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}$ 大小的分量,例如

$$LL = \begin{bmatrix} LL^{(1)} & LL^{(2)} \\ LL^{(3)} & LL^{(4)} \end{bmatrix}$$

$$LH = \begin{bmatrix} LH^{(1)} & LH^{(2)} \\ LH^{(3)} & LH^{(4)} \end{bmatrix}, \dots$$

从图 2 的例子还可看到,图象经过 GHM 多小波变换后, LL 子图象的 4 个分量图均清晰可见。而图象经过 CL 多小波变换后, LL 子图象的 4 个分量图中只有第一个分量图清晰可见,这说明,图象经过 CL 多小波变换后,原图象的能量不但可汇聚于最低分辨率的子图象 LL 上,而且还可进一步汇聚于 LL 子图象的第一个分量图 $LL^{(1)}$ 上。

表 1 给出了分别用 GHM 多小波和 CL 多小波对 512×512 大小的 Lena 图象进行 4 次多小波变换后最低分辨率子图象 LL 及其 4 个分量的能量特征。

表 1 用 GHM 和 CL 多小波对 Lena 图象进行 4 次多小波变换后的 LL 子图象及其 4 个分量的能量特征

比较项目	LL_1 子图象能量 占图象总能量的 百分比 (%)	LL_1 子图象各个分量的能量之比			
		$LL^{(1)}$	$LL^{(2)}$	$LL^{(3)}$	$LL^{(4)}$
GHM 多小波	97.31	44.76	21.80	22.24	11.20
CL 多小波	97.36	96.53	2.51	0.62	0.34

从表 1 的统计数据可以看到,不论是使用 GHM 多小波还是使用 CL 多小波,图象经过 4 次多小波变换后,97% 以上的能量都集中在 LL_1 子图象上;从表 1 还可以看到,如果使用 CL 多小波, LL_1 子图象的绝大部分能量又进一步集中(96% 以上)在 LL_1 子图象的第 1 个分量图 $LL^{(1)}$ 上。这表明 CL 多小波变换能量汇聚的能力确实要比 GHM 多小波强,而且对图象编码来说,各子图象及其分量的能量分布是比特分配的主要依据。CL 多小波变换能量汇聚的能力愈强,就意味着需要分配比特编码的系

数愈少,即提高压缩比的空间愈大。

根据 CL 多小波能量汇聚的特点,提出了 CL 多小波图象编码方法,其核心思想就是要把最低分辨率子图象的 4 个分量区别对待,使得各分量的比特分配与它们的能量分布相适应。CL 多小波图象编码方法,其主要步骤如下:

(1) 对图象进行多次多小波变换,虽然多小波变换的次数愈多,其最低分辨率子图象的尺寸也就愈小,但是,它所包含的能量也会随之减少。因此,多小波变换的次数并不是愈多愈好。对于一幅 512×512 大小的图象,多小波变换的次数以 3~4 次为宜(对于 CL 多小波来说,这相当于 4~5 次单小波变换)。

(2) 对于最低分辨率子图象的第一分量 $LL^{(1)}$ 分配较多的比特进行编码,由于比特预算充裕,因而可考虑采用一些失真度较小的编码方法来进行编码。

(3) 把最低分辨率子图象的其他 3 个分量 ($LL^{(2)}$ 、 $LL^{(3)}$ 和 $LL^{(4)}$) 和其他较高分辨率的子图象 (LH_1 、 HL_1 、 HH_1 、...) 一起编码。对这些子图象编码的目的是要保留原图象的边缘信息,因此,只需要对数值较大的系数进行编码,而零树编码^[5]就是对这些高分辨率子图象进行编码的优秀算法。

3 编码实验结果

(1) Lena 图象 (512×512) 编码实验结果

图 3 给出了用 CL 多小波图象编码方法对 512×512 大小的 Lena 图象进行编码的结果。表 2 给出本文方法的编码结果与 Strela 等人提出的 GHM 多小波方法的图象编码结果^[3] 比较。从表 2 可见,仅就压缩比和信噪比而论,本文方法的编码结果要优于 Strela 等人编码方法^[1] 的编码结果。

表 2 用不同编码方法编码后恢复图象的信噪比

压缩率	4:1	8:1	16:1	32:1	64:1	128:1
文献[1]的方法	信噪比 (dB)	35.3	31.8	29.4	27.1	
本文的方法	信噪比 (dB)	43.5	38.7	35.1	31.9	29.0 26.5

(2) Playboy 图象 (512×512) 编码实验结果

图 4 给出了 CL 多小波图象编码方法对 512×512 大小的 Playboy 图象进行编码的结果,也即编码后再重建的图象。



(a) 压缩比 128:1 的恢复图象
(PSNR=26.5dB)



(b) 压缩比 64:1 的恢复图象
(PSNR=29dB)



(c) 压缩比 32:1 的恢复图象
(PSNR=31.9dB)



(d) 压缩比 15:1 的恢复图象
(PSNR=35.1dB)



(e) 压缩比 8:1 的恢复图象
(PSNR=38.7dB)



(f) 压缩比 4:1 的恢复图象
(PSNR=43.5dB)

图3 Lena 图象用 CL 多小波编码方法进行编码的结果



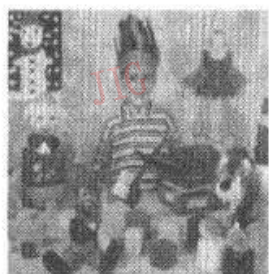
(a) PLAYBOY 原图



(b) 压缩比 64:1 的恢复图象
(PSNR=26.6dB)



(c) 压缩比 32:1 的恢复图象
(PSNR=29.8dB)



(d) 压缩比 16:1 的恢复图象
(PSNR=33.8dB)



(e) 压缩比 8:1 的恢复图象
(PSNR=38.7dB)



(f) 压缩比 4:1 的恢复图象
(PSNR=44.4dB)

图4 Playboy 图象用 CL 多小波编码方法进行编码的结果

4 结 论

(1) 图象的多小波变换比图象的(单)小波变换复杂,但也因此提供了更大的自由度.一幅图象经过多小波变换后,不但可分解为不同空间方向和不同分辨率的子图象,而且每个子图象又由不同的分量组成.对图象编码而言,这就意味着不但可以针对不同的子图象来制定不同的量化策略,而且还可以针对子图象的不同分量来制定不同的量化策略.但是,目前尚未看到利用子图象分量的差异性进行多小波图象编码的报道.

(2) 根据行向量和列向量前置滤波的方式和次序的不同,图象多小波变换的结果也会不同,而本文给出的图象多小波变换算法,是对从互联网上下载的有关软件进行仔细阅读、反复验证后才提出来的,对于从事多小波应用研究的人们也许有一定的参考价值.

(3) 图象经过 CL 多小波图象编码后,原图象的绝大部分能量都集中在最低分辨率子图象的第一个分量上.由于其他 3 个分量所包含的能量,与第一个分量所包含的能量相比,微乎其微,不足论道(见表 1),因此,在图象编码时,应当把最低分辨率子图象的第一个分量与其他 3 个分量区别对待,而不是把最低分辨率子图象当作一个整体来对待,这就是本文提出的 CL 多小波图象编码方法的基本思想.另外笔者认为,在进行高分辨率图象编码时,其他分辨率子图象(如 LH、HL 和 HH)的各分量的差异性也应当有所作为.

参 考 文 献

- 1 Geronimo J S, Hardin D P, Massopust P R. Fractal functions and wavelet expansions based on several functions. *J. Approx. Theory*, 1994,78(4):373~401.
- 2 Chui C K, Lian J A. A study of orthonormal multiwavelets. *Applied Numerical Mathematics*. 1996,20(2):273~298.
- 3 Strela V, Heller P N, Strang G *et al.* The application of multiwavelet filter banks to signal and image processing. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1999,8(4):548~563.
- 4 Strang G, Strela V. Short wavelets and matrix dilation equations. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995,43(1):108~115.
- 5 Shapiro J. Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993,41(12):3445~3462.

附录:多小波及其前、后置滤波器

(1) GHM 多小波所确定的 $L(n)$ 和 $H(n)$ 如下:

$$L(0) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5 \times \sqrt{2}} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{3}{10 \times \sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$L(1) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5 \times \sqrt{2}} & 0 \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$L(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{9}{20} & \frac{3}{10 \times \sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$L(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{20} & 0 \end{bmatrix}$$

$$H(0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{20} & -\frac{3}{10 \times \sqrt{2}} \\ \frac{1}{10 \times \sqrt{2}} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$H(1) = \begin{bmatrix} \frac{9}{20} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{9}{10 \times \sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$H(2) = \begin{bmatrix} \frac{9}{20} & -\frac{3}{10 \times \sqrt{2}} \\ \frac{9}{10 \times \sqrt{2}} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$H(3) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{20} & 0 \\ -\frac{1}{10 \times \sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

(2) CL 多小波所确定的 $L(n)$ 和 $H(n)$ 如下

$$L(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2 \sqrt{2}} & -\frac{1}{2 \sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{7}}{4 \sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{7}}{4 \sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$L(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2 \sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$L(2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$H(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$H(1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$H(2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(3) 与 GHM 多小波相配套的前置滤波器 $P_{re}(n)$ 和后置滤波器 $P_{ost}(n)$ 如下

$$P_{re}(0) = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 8 \times \sqrt{2} & 8 \times \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{re}(-1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 \times \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{ost}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$P_{ost}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{4 \times \sqrt{2}}{5} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

(4) 与 CL 多小波相配套的前置滤波器 $P_{re}(n)$ 和 $P_{ost}(n)$ 后置滤波器如下:

$$P_{re}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{1+\sqrt{7}} & -\frac{1}{1+\sqrt{7}} \end{bmatrix}$$

$$P_{ost}(0) = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1+\sqrt{7}}{2} \\ 2 & -\frac{1+\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}$$



黄卓君 1974年生,现为中山大学通信与信息系统专业硕士研究生,研究方向为多媒体数据处理与传输。



马争鸣 1957年生,1989年获清华大学模式识别与智能控制专业博士学位,现为中山大学电子系副教授,主要研究兴趣为小波分析、分形几何和人工神经网络。